

CC- p 调和映照的 Liouville 型定理

种 田

(上海第二工业大学理学院, 上海 201209)

摘 要: 拟调和映照以及广义拟调和映照在研究拟 Hermitian 几何中发挥着重要作用。在前期工作的基础上, 考虑引入 p - 水平能量泛函以及相应的 p - 水平应力能量张量, 此张量成为研究守恒律的有利工具并且推导出与该张量联系紧密的基本积分公式。利用此基本积分公式建立关于 p - 水平能量张量的单调不等式, 推导出关于 p - 水平能量增长性条件下 CC- p 调和映照的 Liouville 型定理。此类型的 Liouville 型定理有助于进一步理解与拟 Hermitian 流形相关的性质。

关键词: CC- p 调和映照; 单调不等式; Liouville 型定理

中图分类号: O186.1

文献标志码: A

0 引 言

调和映照是黎曼流形间映照能量泛函的临界点, 它是几何分析领域中的核心课题之一, 同时它也在复分析、材料科学、理论物理等自然科学分支中有着广泛的应用。调和映照理论被许多数学家用来研究黎曼流形的几何结构, 它是微分几何中测地线、极小子流形以及调和函数概念的自然推广。Liouville 型定理是调和映照理论中的重要问题之一, 它对研究黎曼流形结构、黎曼几何性质等方面有着重要的应用。1980 年, Baird 等^[1] 引入了黎曼流形间映照的应力能量张量, 此张量使得关于调和映照的许多理论得到了统一, 特别是在建立调和映照 Liouville 型定理方面有着显著的应用。调和映照理论中, 大部分的 Liouville 型定理都是在能量增长性条件或是在对映照的像进行一定限制条件下得到的^[2-6]。Sealey^[5] 引入了关于向量丛值 p 形式的应力能量张量, 并且建立了调和 p 形式的消灭定理。东瑜昕等^[7] 利用应力能量张量建立了关于向量丛 p 形式的单调不等式, 他们仍然是从建立基本的积分公式出发, 通过使用不同的穷竭函数构造积分公式中所需要的向量场。

近年来, 拟 Hermitian 流形受到许多几何学家的关注, 它与复分析、黎曼几何以及次黎曼几何都有

着紧密的联系。如果拟 Hermitian 流形的拟 Hermitian 挠率为 0, 则称其为 Sasakian 流形。Sasakian 流形与 Kähler 流形联系密切, 实际上一个黎曼流形是 Sasakian 流形当且仅当其锥度量是 Kähler 的。

在研究拟 Hermitian 流形时, 许多拟调和映照的概念在不同的问题背景下被引入, 许多几何学家针对从拟 Hermitian 出发的映照性质进行了讨论, 并且称在各种限制性变分条件下的水平能量泛函的临界点为拟调和映照^[8-11]。作者已经研究了从黎曼流形出发到拟 Hermitian 流形的 CC 调和映照, 并给出能量增长性条件下的 Liouville 型定理^[12]。本文考虑引入从黎曼流形出发到拟 Hermitian 流形的 p - 水平能量泛函以及相应的 p - 水平应力能量张量, 利用基本的积分公式推导关于 p - 水平能量张量的单调不等式, 从而建立 p - 水平能量增长性条件下的 Liouville 型定理。类似于黎曼几何和 Kähler 几何中调和映照的作用, CC- p 调和映照也被期望在拟 Hermitian 几何中发挥重要作用。

1 拟 Hermitian 流形

设 $(N, T_{1,0}N)$ 是一个定向的 CR 流形且 θ 是 N 上的一个拟 Hermitian 结构。如果其上的 Levi 形式 L_θ 是正定的, 则称 $(N, T_{1,0}N)$ 是一个严格拟凸的

收稿日期: 2016-09-18

通信作者: 种 田 (1988-), 女, 安徽马鞍山人, 讲师, 博士, 主要研究方向为微分几何学。E-mail: chongtian@sspu.edu.cn。

基金项目: 上海第二工业大学校基金 (EGD16XQD01), 上海第二工业大学校重点培育学科 (XXKPY1604) 资助

CR 流形, 为了突出拟 Hermitian 结构的重要性, 也称其为拟 Hermitian 流形, 并记作 $(N, H(N), J, \theta)$, 其中 $H(N)$ 是 Levi 分布, J 是它上的复结构。

如果 $(N, H(N), J, \theta)$ 是一个拟 Hermitian 流形, 记 T 为 Reeb 方向, 有如下直和分解:

$$TN = H(N) \oplus RT, \quad \pi_H : TN \rightarrow H(N)$$

是关于此分解的投射。记 g_θ 为其 Webster 度量, 同黎曼流形上的 Levi-Civita 联络相类似, 在拟 Hermitian 流形上, 也存在一个典范联络, 它同时保持 CR 结构和 Webster 度量。

定理 [11] 设 $(N, H(N), J, \theta)$ 是一个拟 Hermitian 流形, 则 TN 上存在唯一的线性联络 ∇ , 称为 Tanaka-Webster 联络, 满足:

- (1) 分布 $H(N)$ 关于 ∇ 平行;
- (2) $\nabla J = 0, \nabla g_\theta = 0$;
- (3) ∇ 的挠率 T_∇ 满足对任意的

$$Z, W \in \Gamma(T_{1,0}N) : T_\nabla(Z, W) = 0$$

$$T_\nabla(Z, \bar{W}) = 2\sqrt{-1}L_\theta(Z, \bar{W})T, \tau J + J\tau = 0$$

这里相应的向量值 1 形式 τ 是相应的拟 Hermitian 挠率。

由上述定理可知 $\nabla T = 0, \nabla \theta = 0$, 拟 Hermitian 挠率 τ 是 $H(N)$ 值的, 且关于 g_θ 是自伴的, 记 $A(X, Y) = \langle \tau X, Y \rangle$, 则 $A(X, Y) = A(Y, X)$ 。如果一个拟 Hermitian 流形的 $\tau = 0$, 则将其称为 Sasakian 流形。

引理 1 设 $f : (M, g) \rightarrow (N, H(N), J, \theta)$ 是从黎曼流形到拟 Hermitian 流形的光滑映照, 对于任意的 $X, Y \in \Gamma(TM)$, 有

$$\begin{aligned} \nabla_X df(Y) - \nabla_Y df(X) = \\ df([X, Y]) + \theta(df(X))\tau(df(Y)) - \\ \theta(df(Y))\tau(df(X)) + d\theta(df(X), df(Y))T \end{aligned}$$

证明 令 $(U, x^1, \dots, x^m)$ 和 $(V, y^1, \dots, y^{2n+1})$ 分别是 M 和 N 上的局部坐标系。不妨假设 $f(U) \subseteq V$ 。由于 $[\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j] = 0$, 为证引理结果只用说明

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} df\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} df\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \\ T_\nabla\left(df\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right), df\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right) \end{aligned}$$

将拉回坐标系记作 $(\partial/\partial y^\alpha)_f$, 可作如下计算:

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} df\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} df\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \\ \sum_{a,b=1}^{2n+1} \frac{\partial f^a}{\partial x^i} \frac{\partial f^b}{\partial x^j} T_\nabla\left(df\left(\frac{\partial}{\partial y^a}\right), df\left(\frac{\partial}{\partial y^b}\right)\right) = \\ T_\nabla\left(df\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right), df\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right) \end{aligned}$$

证毕。

2 CC-p 调和映照

2.1 水平能量的第一变分公式

设 $f : (M, g) \rightarrow (N, H(N), J, \theta)$ 是从黎曼流形到拟 Hermitian 流形的光滑映照。对 M 中任意具有光滑边界的有界区域 D , 考虑如下形式的 p -水平能量泛函 ($p \geq 2$):

$$E_{H,D}^p(f) = \frac{1}{p} \int_D |df_H|^p dv_g$$

其中, $df_H = \pi_H \circ df$ 。

如果 M 是紧的, 那么自然可以在整个 M 上定义水平能量泛函, 记作 $E_H^p(f)$ 。

令 ∇^M 和 ∇ 分别是 (M, g) 和 $(N, H(N), J, \theta)$ 上的 Levi-Civita 联络以及 Tanaka-Webster 联络。记 β 是关于 (∇^M, ∇) 的第二基本形式, 接下来推导关于 p -水平能量的第一变分公式。

定理 1 设 $f : (M, g) \rightarrow (N, H(N), J, \theta)$ 是从黎曼流形到拟 Hermitian 流形的光滑映照。对 M 中任意具有光滑边界的有界区域 D , 若 $V \in \Gamma(f^{-1}H(N))$ 是 M 中的水平变分向量场并且支集落在 D 中, $\{f_t\}_{|t|<\varepsilon}$ 是 f 的光滑单参数变分满足 $f_0 = f$ 以及 $V = \frac{\partial f_t}{\partial t} \Big|_{t=0}$, 则

$$\frac{dE_{H,D}^p(f_t)}{dt} \Big|_{t=0} = - \int_D \langle V, \tau_H^p(f) \rangle dv_g$$

其中:

$$\begin{aligned} \tau_H^p(f) = df_H(\text{grad}(|df_H|^{p-2})) + \\ |df_H|^{p-2} \text{tr}_g[\beta_H + (f^*\theta) \otimes (f^*\tau)], \end{aligned}$$

$\beta_H = \pi_H \circ \beta$, 称 $\tau_H^p(f)$ 为 f 的 CC-p 张力场。

证明 对于给定的单参数变分 $\{f_t\}_{|t|<\varepsilon}$, 令 $\Phi(\cdot, t) = f_t(\cdot)$, 以及 $V_t = \frac{\partial f_t}{\partial t}$ 。设 $\{e_i\}_{i=1}^m$ 是 TM 上

的一组局部正交标架。由引理 1, 计算可得:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_{H,D}^p(f_t) = & \sum_{i=1}^m \int_D |\mathrm{d}\Phi_H|^{p-2} \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \mathrm{d}\Phi(e_i), \mathrm{d}\Phi_H(e_i) \rangle \mathrm{d}v_g = \\ & \int_D \sum_{i=1}^m e_i \left[|\mathrm{d}\Phi_H|^{p-2} \left\langle \mathrm{d}\Phi \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), \mathrm{d}\Phi_H(e_i) \right\rangle \right] - \\ & \sum_{i=1}^m |\mathrm{d}\Phi_H|^{p-2} \left\langle \mathrm{d}\Phi \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), \nabla_{e_i} \mathrm{d}\Phi_H(e_i) \right\rangle - \\ & \left\langle \mathrm{d}\Phi \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), \mathrm{d}\Phi_H(\mathrm{grad}(|\mathrm{d}\Phi_H|^{p-2})) \right\rangle + \\ & |\mathrm{d}\Phi_H|^{p-2} \theta \left(\mathrm{d}\Phi \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) \mathrm{tr}_g(\Phi^* A) - \\ & |\mathrm{d}\Phi_H|^{p-2} \left\langle \mathrm{tr}_g(\Phi^* A) \otimes (\Phi^* \tau), \mathrm{d}\Phi \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right\rangle \mathrm{d}v_g \end{aligned}$$

注意到 $V = \frac{\partial f_t}{\partial t} \Big|_{t=0} \in \Gamma(f^{-1}H(N))$, 利用 Stokes 公式可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} E_{H,D}^p(f_t) = & - \int_D \langle V, \mathrm{d}f_H(\mathrm{grad}(|\mathrm{d}f_H|^{p-2})) + |\mathrm{d}f_H|^{p-2} \mathrm{tr}_g[\beta_H + \\ & (f^* \theta) \otimes (f^* \tau)] \rangle \mathrm{d}v_g \end{aligned}$$

注: 如果目标流形 N 是 Sasakian 的, 则上式可简化为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} E_{H,D}^p(f_t) = & - \int_D \langle V, \mathrm{d}f_H(\mathrm{grad}(|\mathrm{d}f_H|^{p-2})) + \\ & |\mathrm{d}f_H|^{p-2} \mathrm{tr}_g \beta_H \rangle \mathrm{d}v_g \end{aligned} \quad (1)$$

证毕。

2.2 CC- p 调和映照的概念

定义 1 设 $f : (M, g) \rightarrow (N, H(N), J, \theta)$ 是从黎曼流形到拟 Hermitian 流形的光滑映照。若对 M 中任意的具有光滑边界的有界区域 D , f 是 p -水平能量 $E_{H,D}^p$ 关于任意的水平变分向量场 V 的临界点(V 的支集落在 D 中), 则称 f 是 CC- p 调和映照。

注: 由定理 1 可看出 f 是 CC- p 调和映照当且仅当 $\tau_H^p = 0$ 。

3 p -水平应力能量张量

Baird-Eells 引入了关于黎曼流形间映照能量泛函的应力能量张量场, 并且证明了如果映照是调和的, 那么它一定满足守恒律。下面考虑关于 p -水平能量泛函的 p -水平应力能量张量场, 并且可以证明

在某些特殊条件下, CC- p 调和映照也满足守恒律。

定义 2 设 $f : (M, g) \rightarrow (N, H(N), J, \theta)$ 是从黎曼流形到拟 Hermitian 流形的光滑映照。 f 的 p -水平应力能量张量 $S_{f,H}^p$ 是 M 上的对称 2-张量:

$$S_{f,H}^p = \frac{1}{p} |\mathrm{d}f_H|^p g - |\mathrm{d}f_H|^{p-2} (f^* g_\theta)_H$$

其中, $(f^* g_\theta)_H(\cdot, \cdot) = \langle \pi_H \mathrm{d}f(\cdot), \pi_H \mathrm{d}f(\cdot) \rangle$ 。

对于任意给定的 2-张量 $W \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$, 可按如下方式计算 W 的散度:

$$(\mathrm{div} W)(X) = \sum_{i=1}^m (\nabla_{e_i}^M W)(e_i, X)$$

其中, $\{e_i\}_{i=1}^m$ 是 M 上的一组局部正交标架。下面计算 p -水平应力能量张量 $S_{f,H}^p$ 的散度。

定理 2 对于任意给定的向量场 $X \in TM$, 有

$$\begin{aligned} \mathrm{div} S_{f,H}^p(X) = & - \langle \tau_H^p(f), \mathrm{d}f(X) \rangle + |\mathrm{d}f_H|^{p-2} (\mathrm{tr}_g f^* A)(f^* \theta)(X) \end{aligned}$$

证明 根据散度的定义可知

$$\begin{aligned} (\mathrm{div} S_{f,H}^p)(X) = & \sum_{i=1}^m (\nabla_{e_i} S_{f,H}^p)(e_i, X) = \\ & \sum_{i=1}^m e_i [S_{f,H}^p(e_i, X)] - \sum_{i=1}^m S_{f,H}^p(e_i, \nabla_{e_i} X) \end{aligned} \quad (2)$$

利用引理 1, 分别计算式 (2) 等号右边第 1、第 2 项可得:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m e_i [S_{f,H}^p(e_i, X)] = & \sum_{i=1}^m \left\{ |\mathrm{d}f_H|^{p-2} \langle \mathrm{d}f([X, e_i]), \mathrm{d}f_H(e_i) \rangle + \right. \\ & \left. \frac{1}{p} |\mathrm{d}f_H|^p \langle e_i, \nabla_{e_i}^M X \rangle \right\} + \\ & |\mathrm{d}f_H|^{p-2} (\mathrm{tr}_g f^* A)(f^* \theta)(X) - \\ & |\mathrm{d}f_H|^{p-2} \langle \mathrm{tr}_g(f^* \theta \otimes f^* \tau), \mathrm{d}f(X) \rangle - \\ & \langle \mathrm{d}f_H(\mathrm{grad}(|\mathrm{d}f_H|^{p-2})), \mathrm{d}f(X) \rangle - \\ & |\mathrm{d}f_H|^{p-2} \langle \mathrm{tr}_g \beta_H, \mathrm{d}f(X) \rangle; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m S_{f,H}^p(e_i, \nabla_{e_i} X) = & \sum_{i=1}^m \frac{1}{p} |\mathrm{d}f_H|^p \langle e_i, \nabla_{e_i} X \rangle - |\mathrm{d}f_H|^{p-2} \langle \mathrm{d}f_H(e_i), \\ & \mathrm{d}f_H(\nabla_{e_i} X) \rangle \end{aligned}$$

将上述两式代入式 (2), 整理可得:

$$\operatorname{div} S_{f,H}^p(\mathbf{X}) = -\langle \tau_H^p(f), df(\mathbf{X}) \rangle + |df_H|^{p-2} (\operatorname{tr}_g f^* A)(f^* \theta)(\mathbf{X})$$

证毕。

定义 3 如果 $\operatorname{div} S_{f,H}^p = 0$, 则称 f 满足守恒律。

与黎曼几何中调和映照不同, 只有在一些特殊条件下, CC- p 调和映照才满足守恒律。比如当目标流形是 Sasakian 的, 可得如下推论。

推论 1 如果设 $f: (M, g) \rightarrow (N, H(N), J, \theta)$ 是从黎曼流形到 Sasakian 流形的 CC- p 调和映照, 则 f 满足守恒律, 即 $\operatorname{div} S_{f,H}^p = 0$ 。

4 单调不等式及 Liouville 型定理

假定 (M, g) 是一个带有极点 x_0 的完备黎曼流形, 并且 M 是连通的。所谓极点是指该点处的指数映照是微分同胚。记 $r(x)$ 为关于 x_0 的距离函数, 首先利用积分公式推导出关于 p - 水平能量的单调不等式, 再利用此单调不等式建立关于 CC- p 调和映照的 Liouville 型定理。

4.1 基本积分公式

设 D 为 M 上具有 C^1 边界的有界区域。记 $\mathbf{v}$ 为沿着 ∂D 的单位外法向量场。对 p - 水平应力能量张量 $S_{f,H}^p$ 应用已知的基本积分公式 [8], 可得:

$$\int_{\partial D} S_{f,H}^p(\mathbf{X}, \mathbf{v}) ds_g = \int_D \langle S_{f,H}^p, \nabla \theta_X \rangle + (\operatorname{div} S_{f,H}^p)(\mathbf{X}) dv_g \quad (3)$$

如果 $f: (M, g) \rightarrow (N, H(N), J, \theta)$ 是从黎曼流形到 Sasakian 流形的 CC- p 调和映照, 利用推论 1 以及积分公式 (3) 可推出:

$$\int_{\partial D} S_{f,H}^p(\mathbf{X}, \mathbf{v}) ds_g = \int_D \langle S_{f,H}^p, \nabla \theta_X \rangle dv_g \quad (4)$$

4.2 p - 水平能量的单调不等式及 Liouville 型定理

对任意给定的向量场 $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \Gamma(TM)$, 记 θ_X 为 $\mathbf{X}$ 的对偶一形式, 即 $\theta_X(\mathbf{Y}) = g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, θ_X 的共变导数 $(\nabla^M \theta_X)(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \langle \nabla_Y^M \mathbf{X}, \mathbf{Z} \rangle$ 。如果 $\mathbf{X} = \nabla^M \psi$ 是 M 上某光滑函数的梯度, 那么 $\theta_X = d\psi$ 并且 $\nabla^M \theta_X = \operatorname{Hess}_g(\psi)$ 。

下面将通过选取积分公式 (4) 中的特殊向量场, 来建立关于 p - 水平能量的单调不等式。

定理 3 设 $f: (M, g) \rightarrow (N, H(N), J, \theta)$ 是从

带极点 x_0 的完备流形到 Sasakian 流形的 CC- p 调和映照, 如果存在正常数 Λ 使得

$$\langle S_{f,H}^p, \operatorname{Hess}_g(r^2) \rangle \geq 2\Lambda \frac{|df_H|^p}{p} \quad (5)$$

则对任意的 $0 < \rho_1 \leq \rho_2$, 有

$$\frac{1}{\rho_1^\Lambda} \int_{B(\rho_1)} |df_H|^p dv_g \leq \frac{1}{\rho_2^\Lambda} \int_{B(\rho_2)} |df_H|^p dv_g$$

证明 由于目标流形是 Sasakian 且 f 是 CC- p 调和的, 在式 (4) 中取 $D = B(t)$, $\mathbf{X} = \frac{1}{2} \nabla^M r^2 = r \frac{\partial}{\partial r}$, 可得

$$\int_{\partial B(t)} S_{f,H}^p \left(r \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right) ds_g = \frac{1}{2} \int_{B(t)} \langle S_{f,H}^p, \operatorname{Hess}_g(r^2) \rangle dv_g$$

通过定义以及简单的计算可知:

$$S_{f,H}^p \left(r \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right) = r \frac{|df_H|^p}{p} - r |df_H|^{p-2} \left| df_H \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) \right|^2$$

由余面积公式以及定理中的式 (5) 可得:

$$\frac{t}{p} \frac{d}{dt} \int_{B(t)} |df_H|^p dv_g - \frac{\Lambda}{p} \int_{B(t)} |df_H|^p dv_g \geq t \int_{\partial B(t)} |df_H|^{p-2} \left| df_H \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) \right|^2 ds_g$$

由此可知 $\frac{d}{dt} (t^{-\Lambda} \int_{B(t)} |df_H|^p dv_g) \geq 0$ 。将上述不等式在区间 $[\rho_1, \rho_2]$ 积分, 从而有

$$\frac{1}{\rho_1^\Lambda} \int_{B(\rho_1)} |df_H|^p dv_g \leq \frac{1}{\rho_2^\Lambda} \int_{B(\rho_2)} |df_H|^p dv_g$$

证毕。

引理 2 设 $f: (M, g) \rightarrow (N, H(N), J, \theta)$ 是一个光滑映照。如果 $df_H = 0$, 那么 $f(M)$ 一定落在某根纤维中, 这里的纤维是指 N 中沿 Reeb 方向 T 的积分曲线。

证明 由于拟 Hermitian 流形 $(N, H(N), J, \theta)$ 上自然有一个 1 维的叶状结构, 故对于 M 中的任意一点 x , 都存在 $f(x)$ 的一个邻域 $V \subseteq N$ 以及某个流形 B 使得 $\pi: V \rightarrow B$ 是一个淹没。这里不妨将 U 选取的足够小, 满足 $f(U) \subseteq V$ 。考虑复合映照 $\pi \circ f: U \rightarrow B$, 显然可以看出 $d(\pi \circ f) = 0$ 当且仅当 $df_H = 0$ 。从而由引理条件可得 $d(\pi \circ f) = 0$, 即 $\pi \circ f$ 在 U 中是常值。因此, $f(U)$ 包含在某根纤维中。由于 M 连通, 故 $f(M)$ 一定落在某根纤维中。

定理 4 设 $f: (M, g) \rightarrow (N, H(N), J, \theta)$ 是从

带极点 x_0 的完备流形到 Sasakian 流形的 CC- p 调和映照, 记 r 为从 x_0 出发的距离函数, 如果存在正常数 Λ 使得

$$\langle S_{f,H}^p, \text{Hess}_g(r^2) \rangle \geq 2\Lambda \frac{|df_H|^p}{p},$$

且

$$\int_{B(r)} |df_H|^p dv_g = o(r^\Lambda)$$

则 $df_H = 0$, 即 $f(M)$ 落在 N 的一根纤维中。

证明 由定理 3, 对于任意的 $0 < \rho < r$, 可得 $\frac{1}{\rho^\Lambda} \int_{B(\rho)} |df_H|^p dv_g \leq \frac{1}{r^\Lambda} \int_{B(r)} |df_H|^p dv_g$, 令 $r \rightarrow +\infty$, 在条件的假设下, 有 $\int_{B(\rho)} |df_H|^p dv_g = 0$ 。由于 ρ 是自由的, 故 $df_H = 0$ 。再根据引理 2 可知, $f(M)$ 的像一定落在 N 的一根纤维中。

5 结 语

本文研究从黎曼流形出发到拟 Hermitian 流形的光滑映照。首先引入了相关的 p -水平能量泛函, 将在限制性变分条件下此类能量泛函的临界点称为 CC- p 调和映照。随后引入 p -水平应力能量张量, 并证明了任何从黎曼流形出发到 Sasakian 流形的 CC- p 调和映照都满足守恒律。最后, 利用基本的积分公式推导出关于 p -水平能量的单调不等式, 利用此类单调不等式建立了能量增长性条件下 CC- p 调和映照的 Liouville 型定理。

对于本文中单调不等式成立的条件, 目前的研究工作正在尝试用更加几何化的曲率条件代替。此外, 除了能量增长性条件, 也正在考虑尝试建立映照像有界或者满足无穷远渐进条件下的 Liouville 型定理。

参考文献:

- [1] BAIRD P, EELLS J. A conservation law for harmonic maps [M]. Geometry Symposium Utrecht 1980. Berlin, Heidelberg: Springer, 1981: 1-25.
- [2] CHENG S Y. Liouville theorem for harmonic maps [J]. American Mathematical Society Providence R I, 1980, 36: 147-151.
- [3] GARBER W D, RUIJSENAARS S N M, SEILER E, et al. On finite action solutions of the nonlinear σ -model [J]. Annals of Physics, 1979, 119(2): 305-325.
- [4] HILDEBRANDT S. Liouville theorems for harmonic mappings, and an approach to Bernstein theorems [J]. Annals of Mathematics Studies, 1982, 102(102): 107-131.
- [5] SEALEY H C J. Some conditions ensuring the vanishing of harmonic differential forms with applications to harmonic maps and Yang-Mills theory [J]. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1982, 91(6): 441-452.
- [6] SHOEN R, YAU S T. Harmonic maps and the topology of stable hypersurfaces and manifolds with non-negative Ricci curvature [J]. Commentarii Mathematici Helvetici, 1976, 51(1): 333-341.
- [7] DONG Y X, WEI S W. On vanishing theorems for vector bundle valued p -forms and their applications [J]. Communications in Mathematical Physics, 2011, 304(2): 329-368.
- [8] PETIT R. Mok-Siu-Yeung type formulas on contact locally sub-symmetric spaces [J]. Annals of Global Analysis & Geometry, 2009, 35(1): 1-37.
- [9] BARLETTA E, DRAGOMIR S, URAKAWA H. Pseudo-harmonic maps from nondegenerate CR manifolds to Riemannian manifolds [J]. Indiana University Mathematics Journal, 2001, 50(2): 719-746.
- [10] CHANG S C, CHANG T H. On the existence of pseudo-harmonic maps from pseudohermitian manifolds into Riemannian manifolds with nonpositive sectional curvature [J]. Asian Journal of Mathematics, 2013, 17(1): 1-16.
- [11] DRAGOMIR S, TOMASSINI G. Differential geometry and analysis on CR manifolds [M]. Birkhäuser Boston: Springer, 2006.
- [12] CHONG T, DONG Y X, REN Y B. Liouville type theorems for CC-harmonic maps from Riemannian manifolds to pseudo-Hermitian manifolds [EB/OL]. [2017-02-06]. http://link.springer.com/article/10.1007/s10455-017-9547-3?wt_mc=Internal.Event.1.SEM.ArticleAuthorOnlineFirst.

Liouville Type Theorem for CC- p Harmonic Maps

CHONG Tian

(School of Science, Shanghai Polytechnic University, Shanghai 201209, China)

Abstract: The theory of pseudoharmonic and general pseudoharmonic maps plays an important role in studying pseudo-Hermitian

geometry. Inspired by the previous work, p -horizontal energy and p -horizontal stress-energy tensor have been introduced. This stress-energy tensor becomes a useful tool to investigate the conservation law of CC- p harmonic maps and the basic integral formulae. Using the basic integral formulae, one can establish some monotonicity formulae for CC- p harmonic maps. Liouville type results follow immediately from these monotonicity formulae and the basic integral formulae under suitable growth conditions on the p -horizontal energy. These results become a useful tool to investigate the properties of pseudo-Hermitian geometry.

Keywords: CC- p harmonic map; monotonicity formulae; Liouville type theorem

简 讯

上海第二工业大学教师入选 2017 年度上海市青年科技英才扬帆计划

为帮助崭露头角的优秀青年科技人才加快成长,使上海实施创新驱动发展战略奠定更好的人才基础,上海市科委通过公开征集、专家评审以及向社会公示,确定了 300 人入选 2017 年度上海市青年科技英才扬帆计划。我校工学部教师刘晓瑜和赵雪伶入选,获资助的项目分别为“尖晶石-层状富锂锰基正极材料的结构演化研究及电压衰减调控”“尖晶型铁磁/石墨烯纳米复合材料的制备及其模拟酶性能研究”。

上海市科委设立的青年科技英才扬帆计划,以扶持青年人才科研项目、助力其学术研究为目的,主要面向在沪高校和科研院所等单位 32 周岁以下的在岗科研人员,要求具有硕士(含)以上学位,无省部级(含)以上项目主持经历,且非在站博士后。项目遴选重视学术价值,弱化功利考量。资助偏重于新兴学科、边缘学科和交叉学科。