文章编号: 1001-4543(2019)02-0114-04 DOI: 10.19570/j.cnki.jsspu.2019.02.008

# 逐次定数截尾下Rayleigh分布的贝叶斯分析

李 琼 [1], 武 东 [2]

(1. 徽商职业学院 电子信息系, 合肥 231201; 2. 安徽农业大学 理学院, 合肥 230036)

**摘 要**: 在平方损失函数、熵损失函数和对称熵损失函数下, 对基于逐次定数截尾样本的 Rayleigh 分布进行了贝叶斯 (Bayes) 统计分析。最后, 利用蒙特卡洛方法进行比较, 得出在熵损失函数下的 Bayes 估计较优。

**关键词**: 逐次定数截尾; Rayleigh 分布; 贝叶斯估计; 损失函数

**中图分类号**: O213.2 **文献标志码**: A

# Bayesian Analysis of Rayleigh Distribution under Progressive Type-II Censoring

LI Qiong [1], WU Dong [2]

(1. Department of Electronic Information, Huishang Vocational College, Hefei 231201, Anhui, China;
2. School of Science, Anhui Agricultural University, Hefei 230036, Anhui, China)

**Abstract:** Bayesian (Bayes) analysis of Rayleigh distribution with progressively Type-II censored samples under squared loss functions, entropy loss function and symmetric entropy loss function was proposed. Finally, through Monte Carlo simulation, it demonstrates the Bayes estimation under entropy loss fuction is better.

**Keywords:** progressive Type-II censoring; Rayleigh distribution; Bayesian estimation; loss function

## 0 引言

关于 Rayleigh 分布产品的可靠性统计分析, 王晓红等 [1] 对定时截尾样本下的 Rayleigh 分布进行了贝叶斯 (Bayes) 估计。肖世校等 [2] 对逐次定数截尾样本的 Rayleigh 分布给出了 Bayes 收缩估计。刘银萍等 [3] 对定时截尾样本下的 Rayleigh 分布给出参数的极大似然估计, 并证明参数估计的强相合性和渐近正态性。刘银萍等 [4] 在对称损失函数下对定数截尾样本的 Rayleigh 分布进行了 Bayes 估计。王婷婷等 [5] 研究了逐步增加 II 型截尾下 Rayleigh 分布的 Bayes 分析, 并给出了不同损失函数下分布参数、可靠性函数和失效率函数的 Bayes 估计和可信区间。但以上未讨论平方损失函数、熵损失函数和对称熵损失函数场合逐次定数截尾下 Rayleigh 分布的 Bayes 分析。因此, 本文对此问题开展相关研究, 主要分为 3 个部分：① 描述逐次定数截尾寿命试验方案和逐次定数截尾的 Rayleigh 分布参数的最大似然估计 (maximum likelihood estimator, MLE); ② 讨论各种损失函数下基于逐次定数截尾的 Rayleigh 分布参数的 Bayes 估计; ③ 利用蒙特卡洛方法产生了 Rayleigh 分布逐次定数截尾样本, 并对 MLE 和各种 Bayes 估计进行了比较分析。

假设产品的寿命 $X$ 服从 Rayleigh 分布, 其概率

收稿日期: 2019-04-12
通信作者: 武东 (1976–), 男, 安徽六安人, 副教授, 硕士, 主要研究方向为应用统计、金融时间序列分析。
E-mail: wudong@ahau.edu.cn
基金项目: 安徽高校自然科学研究重点项目 (KJ2017A892), 安徽省高校优秀青年人才支持计划 (gxyq2019254) 资助

密度和分布函数分别为:

$$f(x;\theta)=\frac{x}{\theta}\exp\left(-\frac{x^2}{2\theta}\right),\quad x>0,\theta>0 \tag{1}$$

$$F(x;\theta)=1-\exp\left(-\frac{x^2}{2\theta}\right),\quad x>0,\theta>0 \tag{2}$$

式中, $\theta$ 为 Rayleigh 分布的刻度参数。

通常进行 Bayes 分析时, 还需要综合考虑 3 个要素：先验信息、样本信息和损失函数 [6]。选取不同的损失函数对 Bayes 参数估计有一定的影响, 损失函数按对估计结果的影响是否对称可分为对称和非对称损失函数。对称损失函数主要有平方损失函数和加权平方损失函数; 非对称损失函数主要有 LINEX 损失函数 [7]、熵损失函数 [8] 和对称熵损失函数 [9] 等。为了比较对称和非对称损失函数在 Bayes 估计中的差异, 选取平方损失函数、熵损失函数和对称熵损失函数作为研究对象, 它们的数学公式分别为:

$$L_1(\theta,d)=(d-\theta)^2 \tag{3}$$

$$L_2(\theta,d)=\frac{d}{\theta}-\ln\frac{d}{\theta}-1 \tag{4}$$

$$L_3(\theta,d)=\frac{d}{\theta}+\frac{\theta}{d}-2 \tag{5}$$

式中, $d$ 为 $\theta$ 的估计量。

**引理 1**[6] 在平方损失函数下, $\theta$ 存在唯一的 Bayes 估计, $\hat{\theta}_1=E[\theta|X]$。

**引理 2**[8] 在熵损失函数下, $\theta$ 存在唯一的 Bayes 估计, $\hat{\theta}_2=[E(\theta^{-1}|X)]^{-1}$。

**引理 3**[9] 在对称熵损失函数下, $\theta$ 存在唯一的 Bayes 估计, $\hat{\theta}_3=[E(\theta|X)/E(\theta^{-1}|X)]^{1/2}$。

## 1 模型描述

逐次定数截尾试验方案 [10-12] 的具体安排可按下述方法进行: 首先依据随机抽样原则抽取 $\beta$ 个测试样本进行寿命试验, 观测到第 1 个测试样品失效时刻 $x_{1:n}$ 时, 然后从剩下的 $(n-1)$ 个测试样品随机取走 $R_1$ 个产品, 剩下的 $(n-R_1-1)$ 个测试样品继续进行试验; 观测到第 2 个测试样品失效时刻 $x_{2:n}$, 再从剩下的 $(n-R_1-2)$ 个测试样品随机取走 $R_2$ 个产品, 剩下的 $(n-R_1-R_2-2)$ 个测试样品仍然进行试验; 按以上描述进行下去, 直至观测到 $m$ 个测试样品失效时刻 $x_{m:n}$ 时试验结束。最后的 $[R_m=n-R_1-R_2-\cdots R_{m-1}-(m-1)]$ 个测试样品全部取走。据此可得 $m$ 个失效测试样品的寿命数据分别为

$$x_{1:n}\leqslant x_{2:n}\leqslant\cdots\leqslant x_{m:n} \tag{6}$$

根据文献 [10], 易知基于式 (6) 的似然函数为

$$L(\theta)=C^*\prod_{i=1}^{m}f(x_{i:n};\theta)[1-F(x_{i:n};\theta)]^{R_i} \tag{7}$$

式中: $C^*=n(n-R_1-1)\cdots(n-R_1-\cdots-R_{m-1}-m+1)$, $n$ 为测试样本个数; $i$ 表示第 $i$ 个测试样本; $m$ 表示失效数。

## 2 MLE

对于测试样品的寿命服从 Rayleigh 分布, 得到逐次定数截尾试验数据, $R_1,R_2,\cdots,R_m$ 是试验中按序被取走的测试样品个数。将式 (1) 和 (2) 代入式 (7), 可得逐次定数截尾下 Rayleigh 分布的似然函数为

$$L(\text{data}|\theta)\propto\frac{1}{\theta^m}\exp\left\{-\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{m}(R_i+1)x_{i:n}^2\right\} \tag{8}$$

式中: $\text{data}=\{x_{i:n}|i=1,2,\cdots,m\}$。

对式 (8) 取对数, 得到对数似然函数为

$$l(\theta)\propto -m\ln\theta-\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{m}(R_i+1)x_{i:n}^2$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}l(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$, 可以得到 $\theta$ 的 MLE 为

$$\hat{\theta}_{MLE}=\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m}(R_i+1)x_{i:n}^2$$

## 3 Bayes 估计

按文献 [5], $\theta$ 的共轭先验为逆伽玛分布 $\mathrm{IG}(\alpha,\beta)$, 其概率密度为

$$\pi(\theta)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{-\alpha-1}\exp\left(-\frac{\beta}{\theta}\right),\quad \theta>0 \tag{9}$$

式中, $\alpha$ 和 $\beta$ 为分布的超参数, 且 $\alpha>0,\beta>0$。如果 $\alpha=0,\beta=0$, 此时为无信息先验。

利用 Bayes 定理, 由似然函数式 (8) 和先验分布式 (9), 可得参数 $\theta$ 的后验分布为

$$\pi(\theta|\text{data})\propto\theta^{-m-\alpha-1}\exp\left\{-\frac{1}{\theta}\left[\beta+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(R_i+1)x_{i:n}^2\right]\right\} \tag{10}$$

很显然式 (10) 所描述的后验分布就是逆伽玛分布

$\mathrm{IG}\left(\alpha+m,\beta+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{m}(R_i+1)x_{i:n}^2\right)$。

在平方损失函数、熵损失函数和对称熵损失函数下, $\theta$ 的 Bayes 估计分别为:

$$\hat{\theta}_1=\frac{1}{m+\alpha-1}\left[\beta+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(R_i+1)x_{i:n}^2\right] \tag{11}$$

$$\hat{\theta}_2=\frac{1}{m+\alpha}\left[\beta+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(R_i+1)x_{i:n}^2\right] \tag{12}$$

$$\hat{\theta}_3=\frac{1}{\sqrt{(m+\alpha)(m+\alpha-1)}}\left[\beta+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(R_i+1)x_{i:n}^2\right] \tag{13}$$

## 4 模拟比较

以上基于 3 种损失函数对逐次定数截尾下 Rayleigh 分布参数进行了 Bayes 估计, 利用蒙特卡洛方法产生逐次定数截尾下 Rayleigh 分布的随机数, 具体操作可按下述步骤进行:

(1) 从标准化指数分布产生 $m$ 个相互独立的随机数 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_m$, 这个变量可以利用逆变换 $Z_i=-\ln(1-U_i)$ 完成, $U_i$ 是相互独立且均为标准化均匀分布随机变量。

(2) 令

$$Y_{i:n}=\frac{Z_1}{n}+\frac{Z_2}{n-R_1-1}+\frac{Z_3}{n-R_1-R_2-2}+\cdots+\frac{Z_i}{n-R_1-\cdots-R_{i-1}-i+1},\quad i=1,2,\cdots,m \tag{14}$$

则得到逐次定数截尾下标准化指数分布随机样本; 式 (14) 中, $n$ 为试验的测试样品总个数; $m$ 为逐次定数截尾随机样本的个数; $R_1,R_2,\cdots,R_{m-1}$ 为试验中按序被取走的测试样品个数。

(3) 令

$$X_{i:n}=[2\theta Y_{i:n}]^{1/2},\quad i=1,2,\cdots,m \tag{15}$$

则 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 是来自 Rayleigh 分布的逐次定数截尾随机样本。

为了考察各种损失函数下的 Bayes 估计的精度, 现取 Rayleigh 分布参数 $\theta=3$, 如果对先验的超参数一无所知, 可采用无信息先验作为先验分布, 这里使用未知参数的共轭分布作为其先验, 其中分布的超参数均取为 $\alpha=1,\beta=1$, 从该分布产生 $m$ 个逐次定数截尾样本 $x_{1:n},x_{2:n},\cdots,x_{m:n}$。每种方案产生 1 000 组模拟样本并分别计算估计的相对偏差与均方误差, 具体试验安排与估计结果见表 1。表 1 中估计方法有 MLE、基于平方损失函数的 Bayes 估计 (Squared)、基于熵损失函数的 Bayes 估计 (Entropy) 和基于对称熵损失函数的 Bayes 估计 (Symmetric)。

表 1 列出的逐次定数截尾下 Rayleigh 分布的试验方案和各种参数估计结果, 由平均绝对差 (MAE) 和均方根误差 (RMSE) 可以看出: 相对于 MLE 而言, 其他损失函数下的 Bayes 估计精度较高; 在其他 3 种 Bayes 估计中, Entropy 相对较优; Symmetric 是 Squared 和 Entropy 的几何平均; 随着样本量的增大, 各种估计的精度也随之提高。

表 1 逐次定数截尾下 Rayleigh 分布的试验方案与估计结果

Tab. 1 Tests scheme and estimation results for Rayleigh distribution under progressive

| 方案 | $n,m$ | $R_1,R_2,\cdots,R_m$ | 估计方法 | MAE | RMSE |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 30, 20 | 2,2,2,0,···,0,4 | MLE | 0.860 9 | 1.085 2 |
| | | | Squared | 0.858 4 | 1.084 5 |
| | | | Entropy | 0.845 4 | 1.057 7 |
| | | | Symmetric | 0.846 2 | 1.064 0 |
| 2 | 40, 20 | 2,2,2,0,···,0,14 | MLE | 0.849 7 | 1.073 2 |
| | | | Squared | 0.845 9 | 1.074 2 |
| | | | Entropy | 0.843 4 | 1.040 2 |
| | | | Symmetric | 0.838 8 | 1.050 0 |
| 3 | 50, 25 | 4,4,4,0,···,0,13 | MLE | 0.786 8 | 1.007 5 |
| | | | Squared | 0.787 1 | 1.010 8 |
| | | | Entropy | 0.769 9 | 0.971 5 |
| | | | Symmetric | 0.773 8 | 0.986 1 |
| 4 | 60, 30 | 5,5,5,0,···,0,15 | MLE | 0.744 5 | 0.922 7 |
| | | | Squared | 0.743 7 | 0.924 2 |
| | | | Entropy | 0.732 6 | 0.899 0 |
| | | | Symmetric | 0.735 3 | 0.907 8 |

## 5 结语

讨论了在各种损失函数下基于逐次定数截尾 Rayleigh 分布参数的 Bayes 估计。关于先验分布的选取采用了共轭先验分布作为 Rayleigh 分布刻度参数先验, 由模拟比较分析可得出, 基于熵损失函数的 Bayes 估计较优。

### 参考文献 :

[1] 王晓红, 栾江辉. 定时截尾瑞利分布的 Bayes 估计 [J]. 通化师范学院学报, 2012, 33(12): 11-13.

[2] 肖世校, 阳连武. 基于逐步递增的 II 截尾样本的 Rayleigh 分布参数的 Bayes 收缩估计 [J]. 统计与决策, 2013(15): 12-14.

[3] 刘银萍, 张雨嫡, 秦青. 定时截尾情形瑞利分布参数的估计和检验 [J]. 吉林师范大学学报 (自然科学版), 2015(4): 57-59.

[4] 刘银萍, 郝冠杰, 梁滨滨. 对称损失函数下定时截尾情形瑞利分布参数的贝叶斯估计 [J]. 吉林师范大学学报 (自然科学版), 2017, 38(1): 43-45.

[5] 王婷婷, 师义民. 瑞利分布的可靠性分析 [J]. 信息与控制, 2010, 39(5): 564-567.

[6] 茆诗松, 汤银才. 贝叶斯统计 [M]. 2 版. 北京: 中国统计出版社, 2012.

[7] 崔群法, 张明亮, 康会光. LINEX 损失下参数未知时指数 - 威布尔分布的 Bayes 估计 [J]. 河南大学学报 (自然科学版), 2011, 41(4): 348-351.

[8] 陈志强, 韦程东, 程艳琴. 熵损失函数下 Burr 分布参数的 Bayes 估计 [J]. 广西师范学院学报 (自然科学版), 2007, 24(3): 30-34.

[9] 王琪, 李玮. 对称熵损失函数下两参数广义指数分布形状参数的 Bayes 估计 [J]. 重庆工商大学学报 (自然科学版),2012, 29(2): 1-4.

[10] BALAKRISHNAN N, AGGARWALA R. Progressive censoring: Theory, methods and applications [M]. Boston: Birkhäuser, 2000.

[11] 李琼, 武东. 逐步增加 II 型截尾下 Pareto 分布的贝叶斯分析 [J]. 上海第二工业大学学报, 2012, 29(2): 135-138.

[12] 武东, 汤银才. 指数分布逐次定数截尾试验的多层贝叶斯估计 [J]. 上海第二工业大学学报, 2011, 28(2): 113-116.